量子Bruhatグラフを用いたレベル・ゼロLSパスの表示 (組合せ論的表現論とその周辺)

佐垣, 大輔

数理解析研究所講究録
第1870巻2013年127-136

量子 Bruhat グラフを用いたレベル・ゼロ LS パスの表示

佐垣 大輔 (Daisuke SAGAKI)
筑波大学 数理物質系 数学域
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba
sagaki@math.tsukuba.ac.jp

1 概要と記号.

本小論説は, 共同研究 [LNS^{3}1], [LNS^{3}2] で得られた結果の一部をまとめたものである. 主な内容は, 量子 Bruhat グラフを用いたレベル・ゼロ LS パス (を cl で射影したもの) の表示, および, それを用いた次数関数 (= エネルギー関数) の記述である.

1.1 記号. 本小論説で使用する記号は以下の通り (詳しくは [Kac] を参照):

$\mathfrak{g}$: ($\mathbb{C}$ 上の) 有限次元単純リー代数, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$: Cartan 部分代数,

Δ : $\mathfrak{g}$ のルート系, $\Delta^{+}\subset\Delta$: 正ルート全体,

$\{h_j\}_{j\in I}$: $\mathfrak{g}$ の単純余ルート, $\{\alpha_j\}_{j\in I}$: $\mathfrak{g}$ の単純ルート,

$Q_{+}:=\sum_{j\in I}\mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_j$, $Q^{\vee}:=\bigoplus_{j\in I}\mathbb{Z}h_j$,

P : $\mathfrak{g}$ の整ウェイト格子, $P_{+}\subset P$: 優整ウェイト全体,

$\{\varpi_i\}_{i\in I}$: $\mathfrak{g}$ の基本ウェイト,

$W:=\langle r_j \mid j\in I\rangle$: $\mathfrak{g}$ の Weyl 群 (但し, r_j : α_j に関する単純鏡映).

$\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$: (untwisted) アフィン・リー代数, 但し,

c : $\widehat{\mathfrak{g}}$ の中心の元, d : 次数作用素,

$\widehat{\mathfrak{h}}:=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Cartan 部分代数.

※ 以下では $\lambda\in\mathfrak{h}^{*}$ を, $\lambda(c)=\lambda(d)=0$ と定めることで, $\lambda\in\widehat{\mathfrak{h}}^{*}$ とみなす.

$\widehat{I}:=I\sqcup\{0\}$, $\{h_j\}_{j\in\widehat{I}}$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純余ルート, $\{\alpha_j\}_{j\in\widehat{I}}$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純ルート,

Δ_{re}^{+} : $\widehat{\mathfrak{g}}$ の正実ルート全体の集合, δ : $\widehat{\mathfrak{g}}$ の null root,

$\widehat{P}$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の整ウェイト格子 ($P \hookrightarrow \widehat{P}$ に注意),
$\widehat{W} := \langle r_j \mid j \in \widehat{I} \rangle$: $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Weyl 群.

$U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$: 量子アフィン代数, $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$: 次数作用素 q^d なしの量子アフィン代数.

2 復習.

2.1 Lakshmibai-Seshadri (LS) パス. まず, Littelmann [L] によって導入されたLS パスについて復習しよう. このサブセクションでは $\lambda \in \widehat{P}$ とする.

定義 2.1.1. $\mu, \nu \in \widehat{W}\lambda$ とする. 以下をみたす $\widehat{W}\lambda$ の元の列 $\mu = \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k = \nu$ と正実ルートの列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \Delta^+_{\mathrm{re}}$ が存在するとき, $\mu > \nu$ と定める: 各 $l = 1, 2, \dots, k$ に対して, $\mu_l = r_{\xi_l}(\mu_{l-1})$ かつ $\langle \mu_{l-1}, \xi_l^\vee \rangle < 0$ が成立する. ここで, $\xi \in \Delta^+_{\mathrm{re}}$ に対して, $r_\xi \in \widehat{W}$ は ξ に関する鏡映を表し, $\xi^\vee$ は ξ の余ルートを表す. $\mu > \nu$ であるとき, $\mathrm{dist}(\mu, \nu)$ で上の条件をみたす列のうち最長のものの長さ k を表すことにする.

定義 2.1.2. $0 < \sigma < 1$ を有理数とし, $\mu, \nu \in \widehat{W}\lambda$, $\mu > \nu$ とする. (μ, ν) に対する σ-chain とは, 以下を満たす $\widehat{W}\lambda$ の元の列 $\mu = \mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_k = \nu$ のことである: 各 $l = 1, 2, \dots, k$ に対して, $\mathrm{dist}(\mu_{l-1}, \mu_l) = 1$, かつ, $\sigma\langle \mu_{l-1}, \xi_l^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ が成立する. ここで, ξ_l は $\mu_l = r_{\xi_l}(\mu_{l-1})$ を満たす唯一つの正実ルートである ($\mu_{l-1} > \mu_l$ および $\mathrm{dist}(\mu_{l-1}, \mu_l) = 1$ に注意).

定義 2.1.3. $\pi = (\underline{\nu}; \underline{\sigma})$ を $\widehat{W}\lambda$ の元の列 $\underline{\nu} : \nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_s$ と有理数の列 $\underline{\sigma} : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1$ の組とする. 各 $u = 1, 2, \dots, s-1$ について, (ν_u, ν_{u+1}) に対する σ_u-chain が存在するとき, π を **型 $\boldsymbol{\lambda}$ の LS パス** と呼ぶ. $\mathbb{B}(\lambda)$ で型 λ の LS パス全体の集合を表す.

以下では $\pi = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s; \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathbb{B}(\lambda)$ を次の区分的に線形で連続な写像 $\pi : [0,1] \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P}$ と同一視する:

$$\pi(t) = \sum_{q=1}^{p-1} (\sigma_q - \sigma_{q-1})\nu_q + (t - \sigma_{p-1})\nu_p \quad \text{for} \quad \sigma_{p-1} \le t \le \sigma_p, \ 1 \le p \le s.$$

さて, [L] に基づいて, $\mathbb{B}(\lambda)$ に ($\widehat{P}$ をウェイト格子とする) クリスタルの構造を定めよう. まず, [L, Lemma 4.5 a)] より, 各 $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して $\pi(1) \in \widehat{P}$ となることが分かる. そこで,

$$\mathrm{wt}(\pi) := \pi(1) \in \widehat{P} \quad \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda)$$

と定める. $\mathbb{B}(\lambda)$ 上の Kashiwara 作用素はルート作用素によって与えられる: $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in \widehat{I}$ に対して,

$$\begin{aligned} H_j^{\pi}(t) &:= \langle \pi(t),\, h_j \rangle \quad \text{for } t \in [0,1], \\ m_j^{\pi} &:= \min\bigl\{ H_j^{\pi}(t) \mid t \in [0,1] \bigr\}, \end{aligned}$$

とおく.

注意 2.1.4 ([L, Lemma 4.5 d)]). 関数 $H_j^{\pi}(t)$ の極小値はすべて整数である. したがって特に, m_j^{π} は 0 以下の整数であり, $H_j^{\pi}(1) - m_j^{\pi}$ は 0 以上の整数である.

この注意を踏まえて, ルート作用素 e_j, $j \in \widehat{I}$, を定義しよう. まず, $m_j^{\pi} = 0$ のときは, $e_j\pi := \mathbf{0}$ と定める. ここで, $\mathbf{0}$ は $\mathbb{B}(\lambda)$ に含まれない元である. $m_j^{\pi} \le -1$ の場合は,

$$(e_j\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \le t \le t_0, \\ \pi(t_0) + r_j(\pi(t) - \pi(t_0)) & \text{if } t_0 \le t \le t_1, \\ \pi(t) + \alpha_j & \text{if } t_1 \le t \le 1, \end{cases}$$

と定める. 但し,

$$\begin{aligned} t_1 &:= \min\bigl\{ t \in [0,1] \mid H_j^{\pi}(t) = m_j^{\pi} \bigr\}, \\ t_0 &:= \max\bigl\{ t \in [0,t_1] \mid H_j^{\pi}(t) = m_j^{\pi} + 1 \bigr\} \end{aligned}$$

である (注意 2.1.4 より, $H_j^{\pi}(t)$ は $[t_0, t_1]$ で狭義単調減少していることが分かる).

次に, ルート作用素 f_j, $j \in I$, だが, $H_j^{\pi}(1) - m_j^{\pi} = 1$ の場合は, $f_j\pi := \mathbf{0}$ と定め, $H_j^{\pi}(1) - m_j^{\pi} \ge 1$ の場合は,

$$(f_j\pi)(t) = \begin{cases} \pi(t) & \text{if } 0 \le t \le t_0, \\ \pi(t_0) + r_j(\pi(t) - \pi(t_0)) & \text{if } t_0 \le t \le t_1, \\ \pi(t) - \alpha_j & \text{if } t_1 \le t \le 1, \end{cases}$$

と定める. 但し,

$$t_0 := \max\{t \in [0,1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi\},$$

$$t_1 := \min\{t \in [t_0,1] \mid H_j^\pi(t) = m_j^\pi + 1\}$$

である (注意 2.1.4 より, $H_j^\pi(t)$ は $[t_0, t_1]$ で狭義単調増加していることが分かる).

定理 2.1.5 ([L, §2, §4]). 任意の $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ と $j \in \widehat{I}$ に対して $e_j\pi,\ f_j\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \cup \{\mathbf{0}\}$ となる. さらに,

$$\begin{cases} \varepsilon_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid e_j^n \pi \neq \mathbf{0}\} & \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ and } j \in \widehat{I}, \\ \varphi_j(\pi) := \max\{n \geq 0 \mid f_j^n \pi \neq \mathbf{0}\} & \text{for } \pi \in \mathbb{B}(\lambda) \text{ and } j \in \widehat{I}, \end{cases}$$

と定めると, $(\mathbb{B}(\lambda), \mathrm{wt}, e_j, f_j, \varepsilon_j, \varphi_j)$ は ($\widehat{P}$ をウェイト格子とする) クリスタルになる.

$\mathbb{B}(\lambda)$ のクリスタル構造については [NS5] を参照されたい.

2.2 レベル・ゼロ LS パス. ここからは $\lambda \in P_+ \hookrightarrow \widehat{P}$ とする; $\langle \lambda, c \rangle = 0$ なので λ は「レベル・ゼロ」である. また, 勝手な $\mu \in \widehat{W}\lambda$ に対して $\langle \mu, c \rangle = 0$ となるので, 勝手な $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して $\langle \pi(t), c \rangle = 0$ となる. よって, $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ も「レベル・ゼロ」である.

$\mathrm{cl} : \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} \widehat{P} \twoheadrightarrow (\mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} \widehat{P})/\mathbb{R}\delta$ を標準射影とする. $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して $\mathrm{cl}(\pi) : [0,1] \to (\mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} \widehat{P})/\mathbb{R}\delta$ を $(\mathrm{cl}(\pi))(t) := \mathrm{cl}(\pi(t))$, $t \in [0,1]$, で定め,

$$\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}} := \{\mathrm{cl}(\pi) \mid \pi \in \mathbb{B}(\lambda)\}.$$

とおく. このとき, 定理 2.1.5 で述べた $\mathbb{B}(\lambda)$ のクリスタル構造は, $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ 上の ($\widehat{P}_{\mathrm{cl}} := \mathrm{cl}(\widehat{P})$ をウェイト格子とする) クリスタル構造を誘導する. すなわち, $\eta = \mathrm{cl}(\pi) \in \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ ($\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$) であるとき,

$$\mathrm{wt}(\eta) := \mathrm{cl}(\mathrm{wt}(\pi)) \in \widehat{P}_{\mathrm{cl}},$$

$$e_j\eta := \mathrm{cl}(e_j\pi), \quad f_j\eta := \mathrm{cl}(f_j\pi) \quad \text{for } j \in \widehat{I},$$

$$\varepsilon_j(\eta) := \varepsilon_j(\pi), \quad \varphi_j(\eta) := \varphi_j(\pi) \quad \text{for } j \in \widehat{I}$$

と定める (但し, $\mathrm{cl}(\mathbf{0}) := \mathbf{0}$ とする); ここで, $\langle \delta, h_j \rangle = 0$ ($^\forall j \in \widehat{I}$) や $r_j\delta = \delta$ ($^\forall j \in \widehat{I}$) に注意すれば, これらが $\eta = \mathrm{cl}(\pi)$ を満たす $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ の取り方には依らず, well-defined であることが分かる.

定理 2.2.1 ([NS1], [NS2], [NS3]). (1) 各 $i \in I$ に対して, $\mathbb{B}(\varpi_i)_{\mathrm{cl}}$ は, Kashiwara [Kas] によって導入された $U'_q(\mathfrak{g})$ のレベル・ゼロ基本表現 $W(\varpi_i)$ の結晶基底に (クリスタルとして) 同型である.

(2) $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ を I の元の列とし (同じものがあってもよい), $\lambda_{\mathbf{i}} := \varpi_{i_1} + \varpi_{i_2} + \cdots + \varpi_{i_p}$ とおく. このとき, クリスタルの同型

$$\Psi_{\mathbf{i}} : \mathbb{B}(\lambda_{\mathbf{i}})_{\mathrm{cl}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}(\varpi_{i_1})_{\mathrm{cl}} \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_2})_{\mathrm{cl}} \otimes \cdots \mathbb{B}(\varpi_{i_p})_{\mathrm{cl}}$$

が存在する.

注意 2.2.2. 各 $i \in I$ について, レベル・ゼロ基本表現 $W(\varpi_i)$ は有限次元既約 $U'_q(\mathfrak{g})$-加群であり, その Drinfeld 多項式 $\{P_i(u)\}_{i \in I}$ は

$$P_i(u) = 1 - au \ ({}^{\exists}a \in \mathbb{Q}(q)), \quad P_j(u) = 1 \ (j \in I, \, j \neq i)$$

という形をしている (例えば [N, Remark 3.3] を参照). この結果により, $W(\varpi_i)$ は ([HKOTY, §2.3] の記号の下で) Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群 $W_1^{(i)}$ に対応していることが分かる. $W(\varpi_i) \cong W_1^{(i)}$ の結晶基底は, 定数倍を除いて一意的なので (例えば [NS4, Lemma 1.5.3] を参照), $W(\varpi_i)$ の結晶基底は, いわゆる (one-column) KR クリスタル $B^{i,1}$ である. したがって, 定理 2.2.1 より, $\mathbb{B}(\varpi_i)_{\mathrm{cl}}$ は KR クリスタル $B^{i,1}$ と同型であり, $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ ($\lambda \in P_+$) は $B^{i,1}$ 達 ($i \in I$) の幾つかのテンソル積に同型である.

2.3 $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ 上の次数関数.

引き続き $\lambda \in P_+ \hookrightarrow \widehat{P}$ とする. このサブセクションでは, [NS6, §3.1] で導入した $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ 上の **次数関数**

$$\mathrm{Deg}_\lambda : \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}} \to \mathbb{Z}_{\leq 0}$$

について復習する.

まず, 記号を幾つか準備する: $\mathbb{B}_0(\lambda)$ を $\pi_\lambda := (\lambda; 0, 1)$ を含む $\mathbb{B}(\lambda)$ の連結成分とする. また, $\pi = (\nu_1, \ldots, \nu_s; \sigma_0, \ldots, \sigma_s) \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して, $\iota(\pi) := \nu_1$ とおく; すなわち, 十分小さい $\epsilon > 0$ に対して $\iota(\pi) = \pi(\epsilon)/\epsilon$ である.

さて, [NS6, Proposition 3.1.3] より, 各 $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ に対して, $\pi_\eta \in \mathbb{B}_0(\lambda)$ であって $\mathrm{cl}(\pi_\eta) = \eta$ かつ $\iota(\pi_\eta) \in \lambda - Q_+$ を満たすものが唯一つ存在する. このとき,

$\mathrm{wt}(\pi_\eta) = \pi_\eta(1)$ は次の形をしている ([NS6, Lemma 3.1.1]):

$$\pi_\eta(1) = \lambda - \beta + K\delta \quad ({}^\exists\beta \in Q_+,\, {}^\exists K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

ここで, η の次数 $\mathrm{Deg}_\lambda(\eta) \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を

$$\mathrm{Deg}_\lambda(\eta) := -K \in \mathbb{Z}_{\leq 0}.$$

で定める.

注意 2.3.1 ([NS6, Lemma 3.2.1] を参照). $\mathrm{Deg}_\lambda : \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}} \to \mathbb{Z}_{\leq 0}$ は, 以下を満たす唯一つの $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ 上の関数である:

(i) $\mathrm{Deg}_\lambda(\eta_\lambda) = 0$. 但し, $\eta_\lambda := \mathrm{cl}(\pi_\lambda)$;

(ii) $e_j\eta \neq \mathbf{0}$ を満たす $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ と $j \in \widehat{I}$ に対して,

$$\mathrm{Deg}_\lambda(e_j\eta) = \begin{cases} \mathrm{Deg}_\lambda(\eta) - 1 & \text{if } j = 0 \text{ and } \iota(e_0\pi_\eta) = \iota(\pi_\eta), \\ \mathrm{Deg}_\lambda(\eta) - \langle \iota(\pi_\eta),\, h_0\rangle - 1 & \text{if } j = 0 \text{ and } \iota(e_0\pi_\eta) = r_0(\iota(\pi_\eta)), \\ \mathrm{Deg}_\lambda(\eta) & \text{if } j \neq 0. \end{cases}$$

$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ を I の元の列とし (同じものがあってもよい), $\lambda_{\mathbf{i}} := \varpi_{i_1} + \varpi_{i_2} + \cdots + \varpi_{i_p}$ とおく. このとき, 定理 2.2.1 (2) より, クリスタルの同型

$$\Psi_{\mathbf{i}} : \mathbb{B}(\lambda_{\mathbf{i}})_{\mathrm{cl}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}(\varpi_{i_1})_{\mathrm{cl}} \otimes \mathbb{B}(\varpi_{i_2})_{\mathrm{cl}} \otimes \cdots \mathbb{B}(\varpi_{i_p})_{\mathrm{cl}} =: \mathbb{B}_{\mathbf{i}}$$

が存在する. $D_{\mathbf{i}} : \mathbb{B}_{\mathbf{i}} \to \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を $\mathbb{B}_{\mathbf{i}}$ 上のエネルギー関数とする (詳細は [HKOTY, §3], [HKOTT, §3.3] や [NS6, §4.1] を参照).

定理 2.3.2 ([NS6, Theorem 4.1.1]). 各 $\eta \in \mathbb{B}(\lambda_{\mathbf{i}})_{\mathrm{cl}}$ に対して,

$$\mathrm{Deg}_{\lambda_{\mathbf{i}}}(\eta) = D_{\mathbf{i}}(\Psi_{\mathbf{i}}(\eta)) - D_{\mathbf{i}}^{\mathrm{ext}}$$

が成り立つ. ここで, $D_{\mathbf{i}}^{\mathrm{ext}} \in \mathbb{Z}$ は (η に依らない) ある定数である.

3 量子 Bruhat グラフと量子 LS パス.

3.1 量子 Bruhat グラフ. $\lambda \in P_+$ とし, $J := \{i \in I \mid \langle \lambda,\, h_i\rangle = 0\}$ とおく. $W_J := \langle r_j \mid j \in J\rangle \subset W$ とすると, W_J を法とする W の各剰余類には長さが最小

の元が唯一つ存在することが知られている; この元をその剰余類の minimal coset representative とよぶ. W^J ($\cong W/W_J$) $\subset W$ を minimal coset representatives 全体の集合とし, $\lfloor\cdot\rfloor = \lfloor\cdot\rfloor_J : W \twoheadrightarrow W^J \cong W/W_J$ を標準射影とする. また,

$$\Delta_J := \Delta \cap \left(\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}\alpha_j\right), \qquad \Delta_J^{\pm} := \Delta^{\pm} \cap \Delta_J,$$

$$\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha, \qquad \rho_J := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_J^+} \alpha.$$

とおく.

定義 3.1.1 ([LNS³1, §4]). **(放物型) 量子 Bruhat グラフ** QB(W^J) とは, 以下のように定義される, $\Delta^+ \setminus \Delta_J^+$ で色付けされた有向グラフである: まず, 頂点集合は W^J である. そして, $w \in W^J$ と $\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_J^+$ に対して, 以下の (i), (ii) のいずれかが成り立つとき $w \xrightarrow{\beta} \lfloor wr_\beta \rfloor$ と定める.

(i) $\ell(\lfloor wr_\beta \rfloor) = \ell(w) + 1$;

(ii) $\ell(\lfloor wr_\beta \rfloor) = \ell(w) - 2\langle \rho - \rho_J, \beta^\vee\rangle + 1$.

QB(W^J) において, 勝手な頂点 $x \in W^J$ から勝手な頂点 $y \in W^J$ への向きのついた道が存在することが分かる ([LNS³1, Remark 6.13]). $x \in W^J$ から $y \in W^J$ への向きのついた道

$$\mathbf{p} : x = x_0 \xrightarrow{\beta_1} x_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_n} x_n = y$$

が与えられたとき, $\mathbf{p}$ のウェイト wt($\mathbf{p}$) $\in Q^\vee$ を

$$\mathrm{wt}(\mathbf{p}) := \sum_{\substack{1\le k\le n \text{ s.t.} \\ \ell(x_k)=\ell(x_{k-1})-2\langle\rho-\rho_J,\beta_k^\vee\rangle+1}} \beta_k^\vee$$

で定める.

命題 3.1.2 ([LNS³1][1]). $x, y \in W^J$ とし, $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ を QB(W^J) における x から y への向きのついた最短の道とする. このとき, wt($\mathbf{p}$) と wt($\mathbf{q}$) は $Q_J^\vee := \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}h_j$ を法として等しい.

[1] この命題は (本稿執筆時点では) arXiv:1211.2042 には含まれていないが, 正式の論文には含まれる予定である.

$x, y \in W^J$ に対して,

$$\mathrm{wt}_\lambda(x \Rightarrow y) := \langle \lambda, \mathrm{wt}(\mathbf{p}) \rangle$$

で定める. ここで, $\mathbf{p}$ は x から y への最短の道である; 命題 3.1.2 および $J = \{i \in J \mid \langle \lambda, h_i \rangle = 0\}$ であることから, $\mathrm{wt}_\lambda(x \Rightarrow y)$ は $\mathbf{p}$ の取り方にはよらないことが分かる.

3.2 量子 LS パス. 各有理数 $\sigma \in \mathbb{Q}$ に対して, $\mathrm{QB}(W^J)$ の (充満) 部分グラフ $\mathrm{QB}_{\sigma\lambda}(W^J)$ を次で定義する: 頂点集合は $\mathrm{QB}(W^J)$ と同じで W^J である. そして, $\mathrm{QB}(W^J)$ の矢印 $\xrightarrow{\beta}$ のうち, $\langle \sigma\lambda, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ を満たすもののみを残す (満たさないものをすべて取り除く).

定義 3.2.1. 型 $\lambda \in P_+$ の量子 LS パスとは, W^J の元の列 $\underline{x} : x_1, x_2, \ldots, x_s$ と有理数の列 $\underline{\sigma} : 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1$ の組 $\eta = (\underline{x}\,;\,\underline{a})$ で次の条件を満たすもののことである: 各 $1 \le u \le s-1$ について, $x_u \neq x_{u+1}$ であり, かつ, $\mathrm{QB}_{\sigma_u\lambda}(W^J)$ において x_{u+1} から x_u への向きのついた道が存在する. $\mathrm{QLS}(\lambda)$ で型 λ の QLS パス全体の集合を表す.

以下では $\eta = (x_1, x_2, \ldots, x_s\,;\,\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathrm{QLS}(\lambda)$ を次の区分的に線形で連続な写像 $\eta : [0, 1] \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ と同一視する:

$$\eta(t) = \sum_{q=1}^{p-1} (\sigma_q - \sigma_{q-1}) x_q \lambda + (t - \sigma_{p-1}) x_p \lambda \quad \text{for} \quad \sigma_{p-1} \le t \le \sigma_p,\ 1 \le p \le s.$$

4 主結果.

4.1 レベル・ゼロ LS パスと量子 LS パスの関係. $\lambda \in P_+ \hookrightarrow \widehat{P}$ とする. まず, $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ は, $[0, 1]$ から $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P})/\mathbb{R}\delta$ への区分的に線形で連続な写像全体の集合 ($\mathbb{P}_{\mathrm{cl}}$ とする) の部分集合であったことを思い出そう. 一方, $\mathrm{cl} : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P} \twoheadrightarrow (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P})/\mathbb{R}\delta$ を $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P$ ($\hookrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{P}$) に制限したものは単射なので, $\mathrm{QLS}(\lambda)$ も $\mathbb{P}_{\mathrm{cl}}$ の部分集合とみなせる.

定理 4.1.1 ([LNS³2]). $\lambda \in P_+ \hookrightarrow \widehat{P}$ とする. このとき, $\mathbb{P}_{\mathrm{cl}}$ の部分集合として,

$$\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}} = \mathrm{QLS}(\lambda)$$

である.

4.2 次数関数に関する公式. $\eta \in \mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}}$ とする. 定理 4.1.1 より, $\mathbb{B}(\lambda)_{\mathrm{cl}} = \mathrm{QLS}(\lambda)$ であるから, $\mathrm{QLS}(\lambda)$ の定義に従って

$$\eta = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_s}_{W^J \text{ の元の列}}; \underbrace{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_s}_{\text{有理数の列}}) \in \mathrm{QLS}(\lambda)$$

と書くことができる. このとき,

定理 4.2.1.

$$\mathrm{Deg}(\eta) = -\sum_{u=1}^{s-1}(1-\sigma_k)\,\mathrm{wt}_\lambda(x_{u+1} \Rightarrow x_u).$$

References

[HKOTT] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi, Paths, crystals and fermionic formulae, *in* "MathPhys Odyssey 2001, Integrable Models and Beyond" (M. Kashiwara and T. Miwa, Eds.), Prog. Math. Phys. Vol. 23, pp. 205–272, Birkhäuser, Boston, 2002.

[HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada, Remarks on fermionic formula, *in* "Recent Developments in Quantum Affine Algebras and Related Topics" (N. Jing and K.C. Misra, Eds.), Contemp. Math. Vol. 248, pp. 243–291, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Kac] V. G. Kac, "Infinite Dimensional Lie Algebras", 3rd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

[Kas] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–175.

[LNS^{3}1] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A.Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, preprint, arXiv:1211.2042.

[LNS^{3}2] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A.Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II, in preparation.

[L] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* (2) **142** (1995), 499–525.

[NS1] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2003** (2003), no. 32, 1731–1754.

[NS2] S. Naito and D. Sagaki, Crystal of Lakshmibai-Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), no. 14, 815–840.

[NS3] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra. II, *Adv. Math.* **200** (2006), 102–124.

[NS4] S. Naito and D. Sagaki, Construction of perfect crystals conjecturally corresponding to Kirillov-Reshetikhin modules over twisted quantum affine algebras, *Commun. Math. Phys.* **263** (2006), 749–787.

[NS5] S. Naito and D. Sagaki, Crystal structure on the set of Lakshmibai-Seshadri paths of an arbitrary level-zero shape, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **96** (2008), 582–622.

[NS6] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai-Seshadri paths of level-zero weight shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations, *Compos. Math.* **144** (2008), 1525–1556.

[N] H. Nakajima, Extremal weight modules of quantum affine algebras, *in* "Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups" (T. Shoji et al., Eds.), Adv. Stud. Pure Math. Vol. 40, pp.343–369, Math. Soc. Japan, 2004.